Početní část 2 - 10.6.2021

3. Definujme funkci
$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n^2+2n}.$$
Poloměr konvergence této řady je $R = 1$. Navíc, řada konverguje i pro $x = \pm 1$ a tedy funkce f je spojitá na intervalu $[-1, 1]$. Pro $|x| < 1$ můžeme derivovat člen po členu a máme
$$f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n} = -x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = -x \ln(1+x).$$
Protože $f(0) = 0$, dostáváme
$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^y f'(x)dx = \int_0^y -x\ln(1+x)dx = -\frac{1}{2}[x^2\ln(1+x)]_0^y + \frac{1}{2}\int_0^y \frac{x^2}{x+1}dx \\ &= -\frac{1}{2}[x^2\ln(1+x)]_0^y + \frac{1}{4}[(x-1)^2]_0^y + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]_0^y \\ &= -\frac{1}{2}y^2\ln(1+y) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(y-1)^2 + \frac{1}{2}\ln(1+y). \end{aligned}$$
A tedy
$$f(1) = \lim_{y\to 1_-} f(y) = \lim_{y\to 1_-} -\frac{1}{2}y^2\ln(1+y) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(y-1)^2 + \frac{1}{2}\ln(1+y) = -\frac{1}{4}.$$

4. Chceme defacto vyintegrovat funkci hustoty podél zadané křivky. Připomeňme, že elipsa je parametrizovaná $x(t) = \sqrt{3}\cos t$, $y(t) = 2\sin t$ a $t \in [0, 2\pi]$. Hmotnost drátu je pak dána pomocí integrálu

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi} \varrho(y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 8|\sin^3 t|\sqrt{3\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt \\ &= 16\int_0^{\pi} \sin^3 t\sqrt{3+\cos^2 t}\,dt \overset{\cos t = r}{=} 16\int_{-1}^{1}(1-r^2)\sqrt{3+r^2}\,dr \\ &\overset{r=\sqrt{3}\sinh t}{=} 48\int_{-s}^{s}(1-3\sinh^2 t)\cosh^2 t\;dt,\end{aligned}$$

kde $s = \operatorname{argsinh}\frac{1}{\sqrt{3}}$. Zde máme několik možností, nejjednodušší je asi vyjádřit integrand v exponenciální formě, kde platí

$$(1-3\sinh^2 t)\cosh^2 t = \frac{1}{16}(14 - 3e^{-4t} + 4e^{-2t} + 4e^{2t} - 3e^{4t}),$$

což můžeme integrovat hned, případně si ještě můžeme dále upravit na

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\cosh(2t) - \frac{3}{8}\cosh(4t)$$

a integrovat

$$\begin{aligned}M &= \int_{-s}^{s} 42 + 24\cosh(2t) - 18\cosh(4t)\;dt \\ &= \left[42t + 12\sinh(2t) - \frac{9}{2}\sinh(4t)\right]_{-s}^{s}.\end{aligned}$$

Tento výsledek už není potřeba dál upravovat.